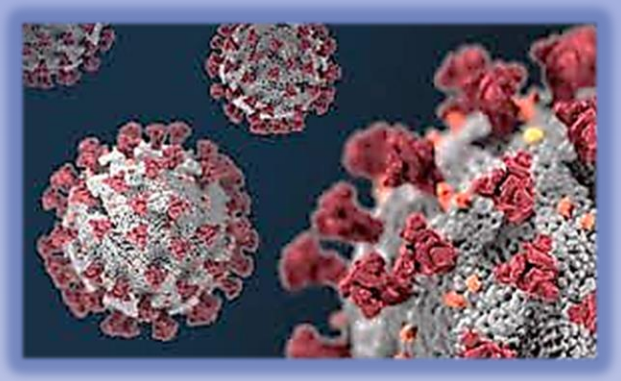


CULTURA VIRALE O CONTAGIO CULTURALE?

Analisi e scenari sul Coronavirus

Fabrizio ZAGO
Cristina DEPONTI
Anna ONOFRI
Pasquale VETRUGNO
Alberto COLOMBO

Il modello S.I.R. della dinamica epidemica

Prevedere per agire nel benessere comune

Prof. Alberto F. Colombo 5/17/2020

Fonti e letture consigliate

Le fonti principali:

- https://static.contactlab.it/zanichelli/pbc/aule-zanichelli-speciale-coronavirus-aggiornamento-31-marzo-2020.html (La matematica di un'epidemia, Claudio Romeni, SPECIALE CORONAVIRUS in Zanichelli Aula di Scienze)
- http://www1.mat.uniroma1.it/people/pensionati/lamberti/lauree/sir.pdf (Progetto Lauree Scientifiche B.Cifra, L.Lamberti, S.Marone Liceo Scientifico di Zagarolo anno scolastico 2008-2009)

Le fonti consultate:

- http://www.fisica.unimi.it/extfiles/unimidire/62701/attachment/delayedseid-data-analysis-15-04-2020.pdf A prediction method of the basic reproduction number and diffusion study of the novel disease Covid-19 in Italy
- https://www.youtube.com/watch?v=-VnYfYj3xWk (Webinar on Mathematics of the COVID19 crisis, Wednesday, the 29th of April)

Si consiglia la lettura del libro di A. Vespignani "L'algoritmo e l'oracolo" Maggio 2019, in particolare il capitolo 6: I mondi artificiali, Mappare la prossima pandemia.

Le curve del contagio
(dal sito del Dipartimento della Protezione Civile:

http://opendatadpc.maps.arcgis.com/apps/opsdashboard/index.html#/b0c68bce2cce478eaac82fe38d4138b1

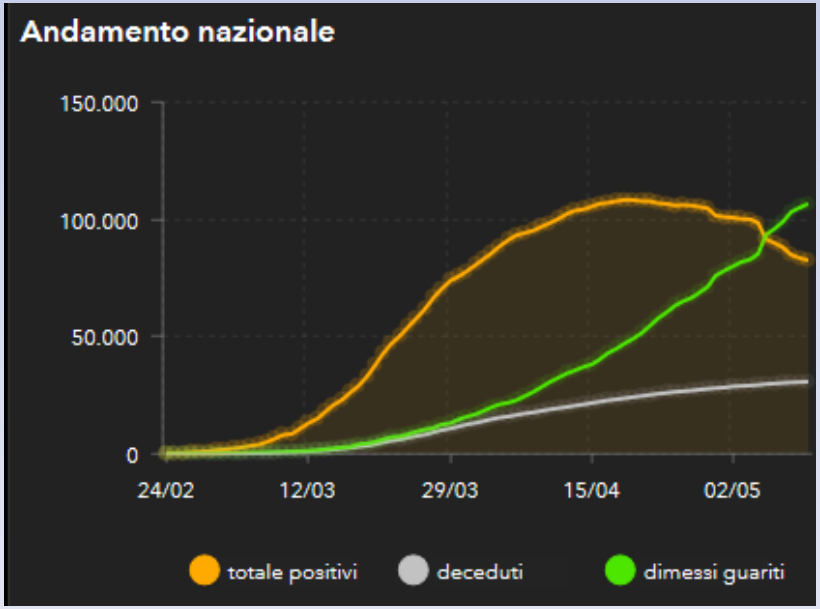
Totale positivi	Guariti	Deceduti	Casi totali
82.488	106.587	30.739	219.814
		Conferma dati in attesa di ISS	

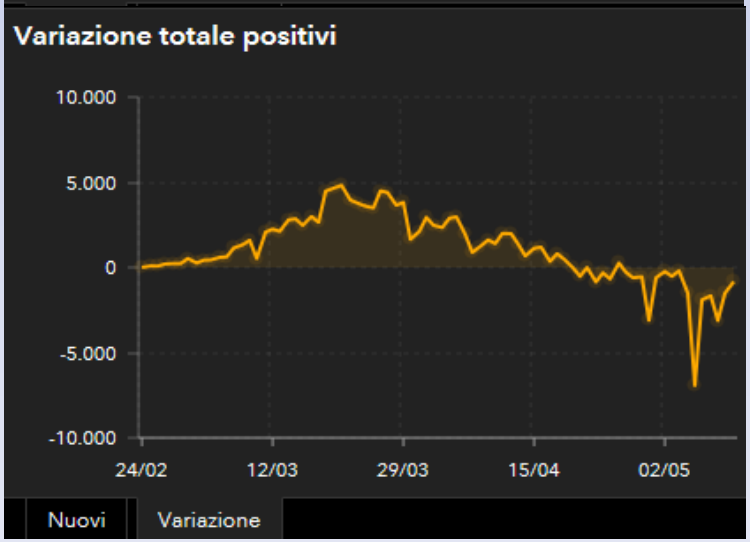
I casi totali sono i contagiati =

Infetti (totale positivi) +

Guariti + Deceduti

11.05.2020 ore 17.00

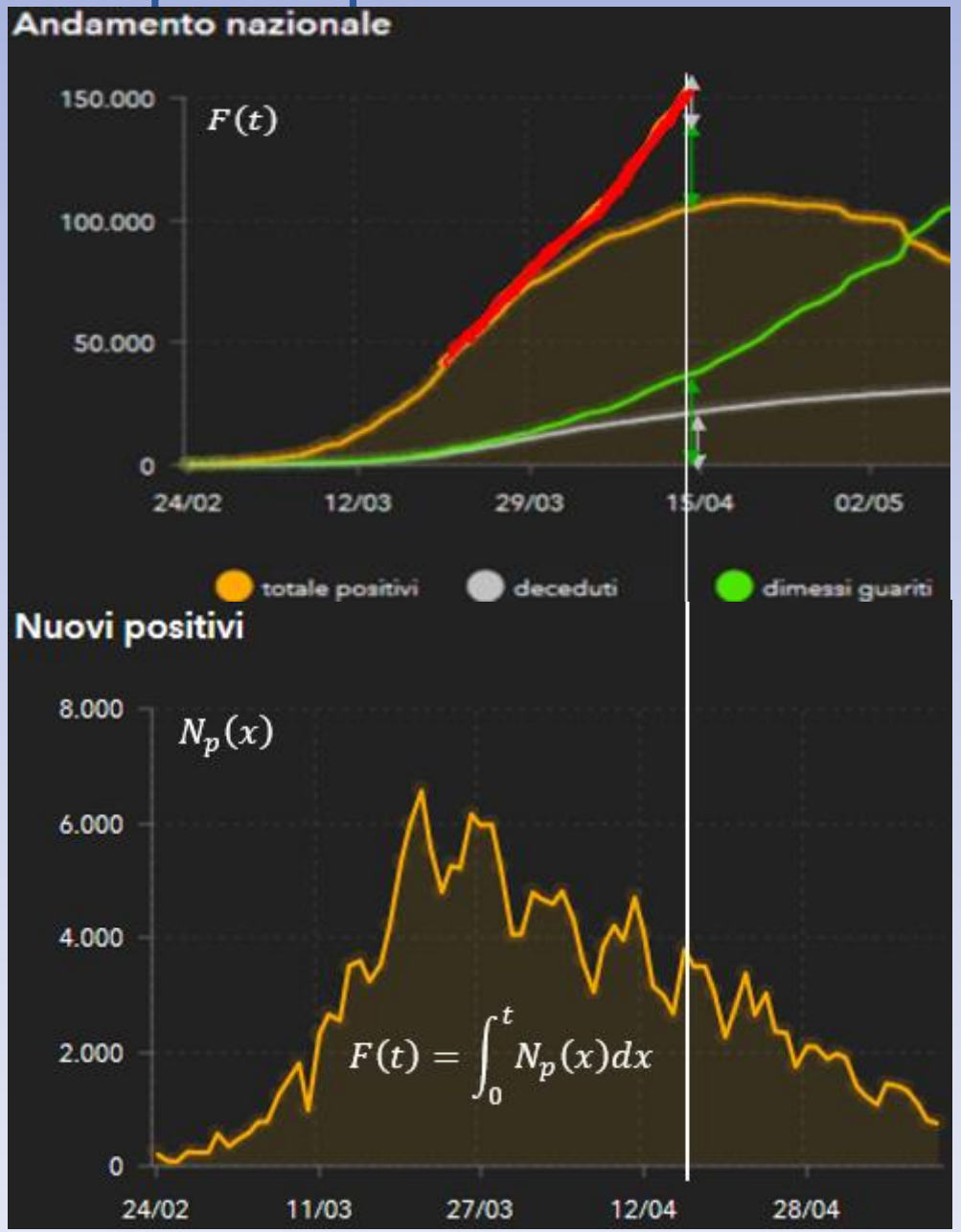




Un po' di matematica per capire i dati

la curva *F(t)* dei casi totali (contagiati) è la funzione di cumulazione dei nuovi positivi:

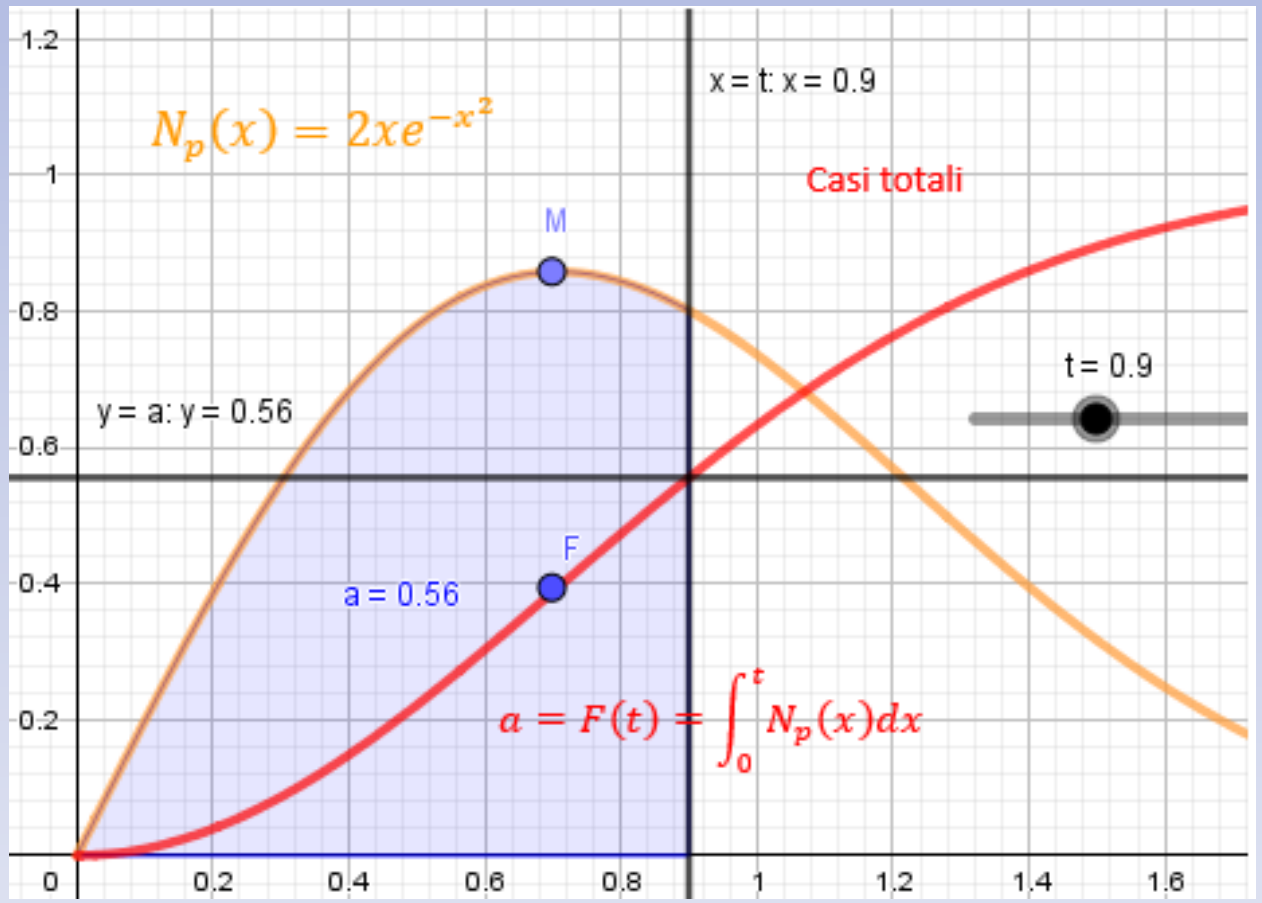
$$F(t) = \int_0^t N_p(x)dx$$



Quando la curva dei nuovi positivi inizia a decrescere

La curva dei casi totali presenta un flesso.

Infatti
la derivata
prima di N_p
è la derivata
seconda di F



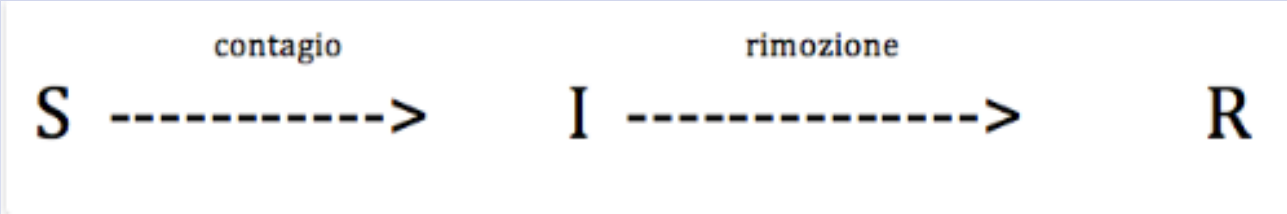
La curva di variazione dei totali positivi …

… è il grafico della derivata prima dei totali positivi

Ora vediamo un modello matematico che simula questi dati

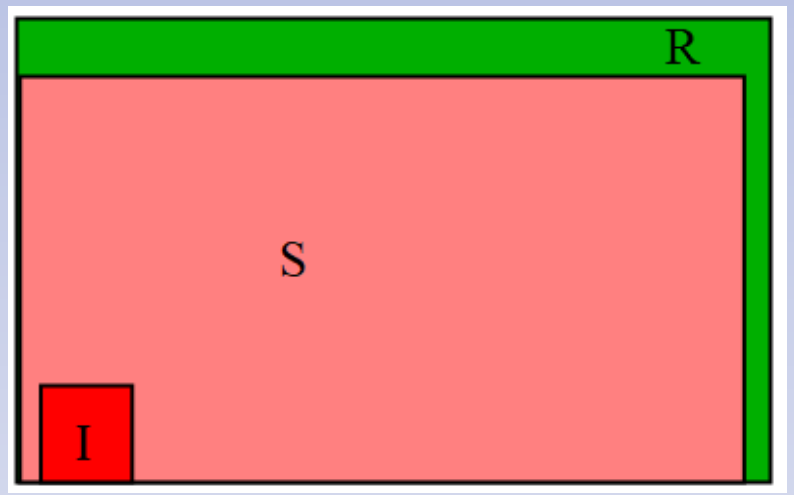
Dalla realtà alla matematica

- Un modello matematico è una descrizione quantitativa della dinamica semplificata di un processo, che consente di fare previsioni sull'evoluzione del processo. Un modello si basa su ipotesi che colgono gli aspetti essenziali del processo e approssimano la complessità della situazione reale.
- Nel caso di un'epidemia, la dinamica è costituita da due processi: **il contagio che crea infetti e la rimozione che li toglie dalla circolazione**.



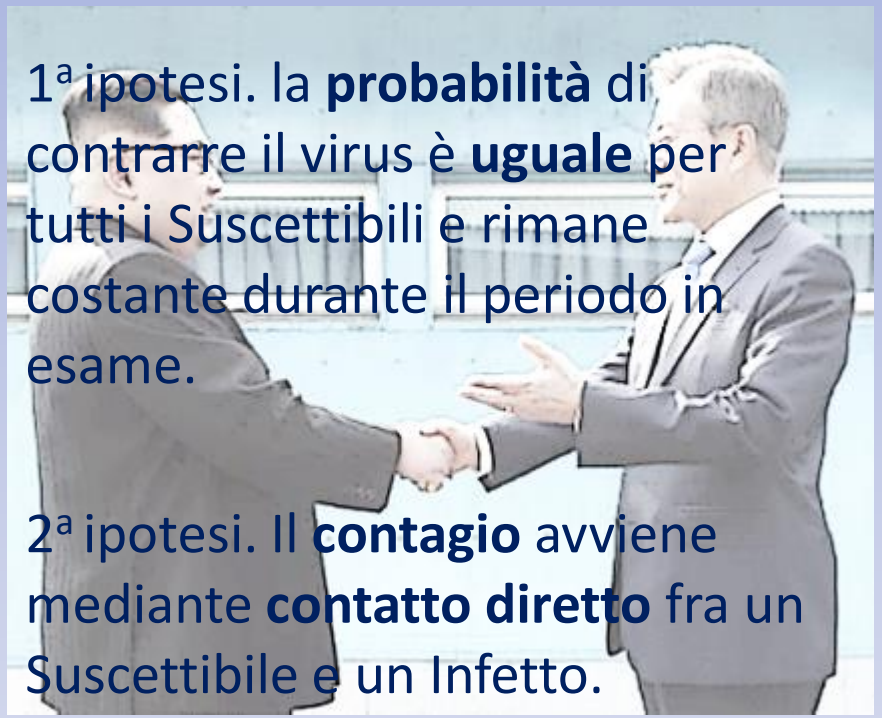
Il modello più semplice: il modello S.I.R. , Suscettibili, Infetti, Rimossi

- La popolazione è composta da **N** individui ripartiti in tre sottoinsiemi:
- **S**, i **suscettibili**, sono individui sani che possono contrarre il virus;
- **I**, gli **infetti**, sono individui che hanno contratto il virus e possono diffonderlo;
- **R**, i **rimossi**, sono individui che diventano immuni al virus, perché sono isolati dal contatto gli altri. Sono quelli in ospedale, in quarantena, quelli immuni che sono sopravvissuti al virus e quelli deceduti a causa del virus.



$$N = S + I + R$$

Le ipotesi del modello semplificato



1ª ipotesi. la **probabilità** di contrarre il virus è **uguale** per tutti i Suscettibili e rimane costante durante il periodo in esame.

2ª ipotesi. Il **contagio** avviene mediante **contatto diretto** fra un Suscettibile e un Infetto.

3ª ipotesi. Il numero di contagi è direttamente proporzionale al numero di incontri tra Suscettibili e Infetti e alla durata dell'incontro

Indicata con **a** la costante di proporzionalità della relazione affermata nell'**ipotesi 3**, tenendo conto che il numero di contagi fa aumentare il numero di Infetti, possiamo scrivere:

$$\Delta I = a \cdot S \cdot I \cdot \Delta t \ ,$$

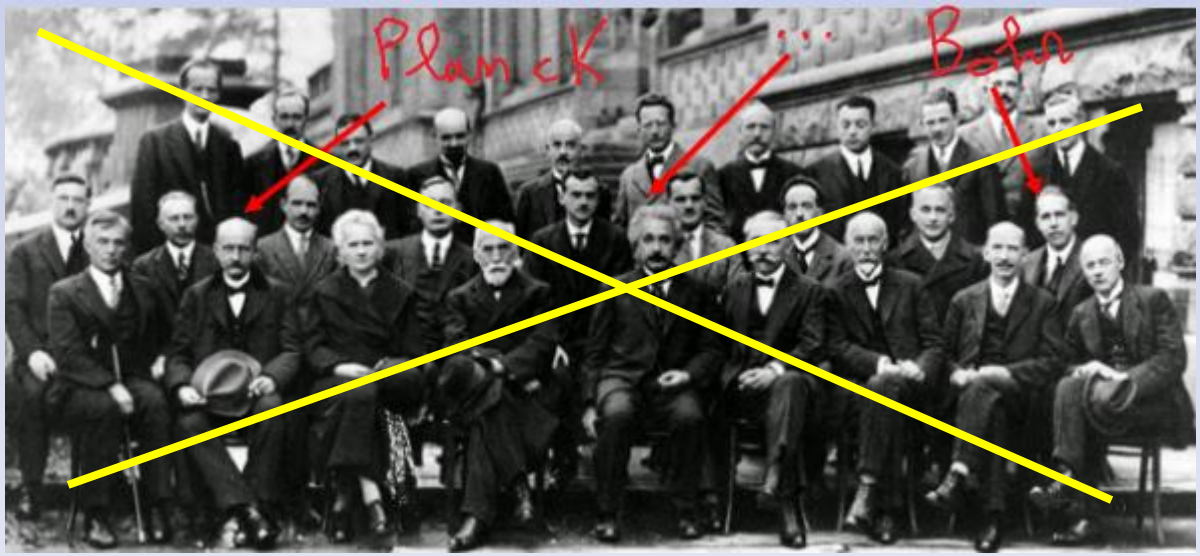
ove Δt è l'intervallo di tempo in cui viene rilevata la variazione del numero del numero di infetti I.

a dipenderà dalla contagiosità **c** del virus et dal numero **n** di contatti diretti

Supponendo che le misure di **c** e di **n** siano stocasticamente indipendenti potremmo scrivere: **a = c·n**

Non avendo ancora un vaccino per distruggere il Sars.CoV-2, la soluzione banale (non praticabile…) è quella di evitare i contatti:

$n = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \Delta I = 0$



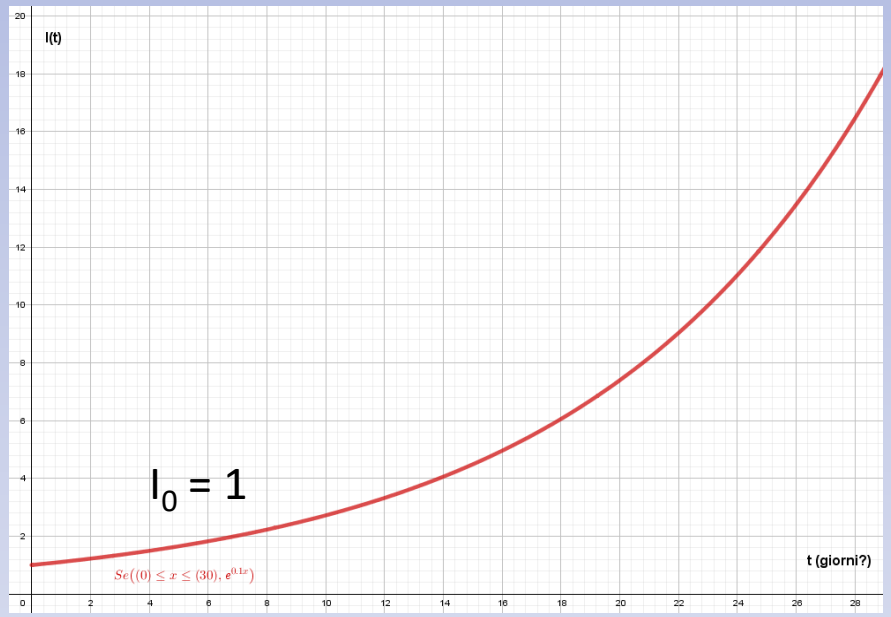
a > 0

Considerando il limite $\Delta t \to 0$ l'equazione $\Delta I = a \cdot S \cdot I \cdot \Delta t$ può essere scritta nella seguente forma differenziale:

$$\frac{dI}{dt} = a \cdot S \cdot I$$

Se S rimanesse costante, si avrebbe la soluzione rappresentata nel diagramma a fianco.

$$I(t) = I_0 e^{a \cdot S \cdot t}$$



Si tratterebbe della crescita esponenziale a partire da un solo individuo infetto!

Però le persone che ora si infettano, prima erano suscettibili …

perciò il numero di suscettibili tende a diminuire.

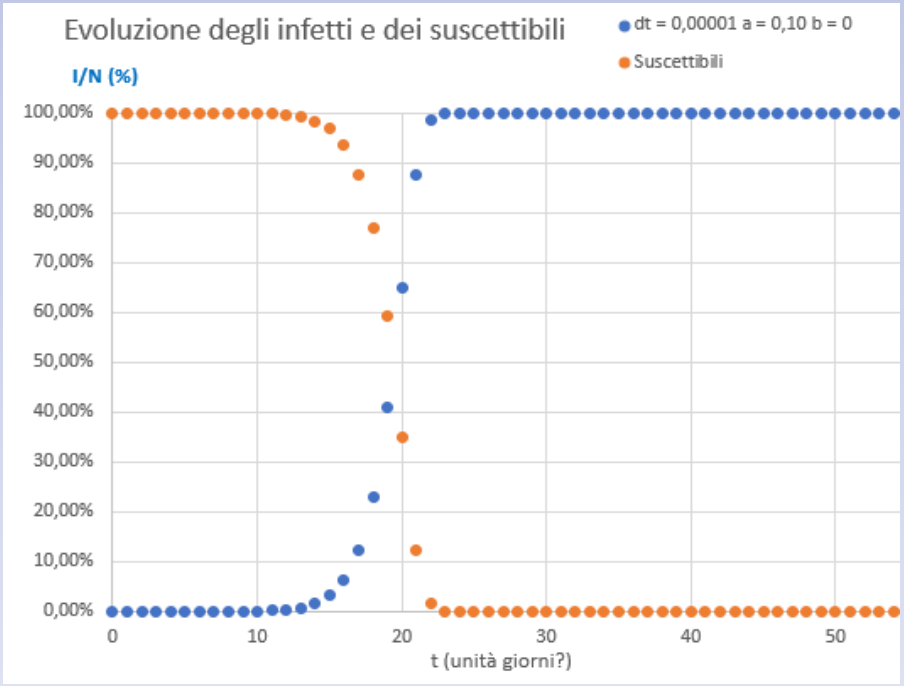
La **dinamica epidemica è** in realtà **complessa**, perché richiede l'affiancamento di un'altra equazione che descrive la variazione del numero dei Suscettibili:

$$\frac{dS}{dt} = -a \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = a \cdot S \cdot I$$

Le due equazioni sono accoppiate in modo non lineare!

Il diagramma mostra il risultato di una integrazione numerica (alle differenze finite) del sistema di equazioni differenziali ($I_0 = 1$)

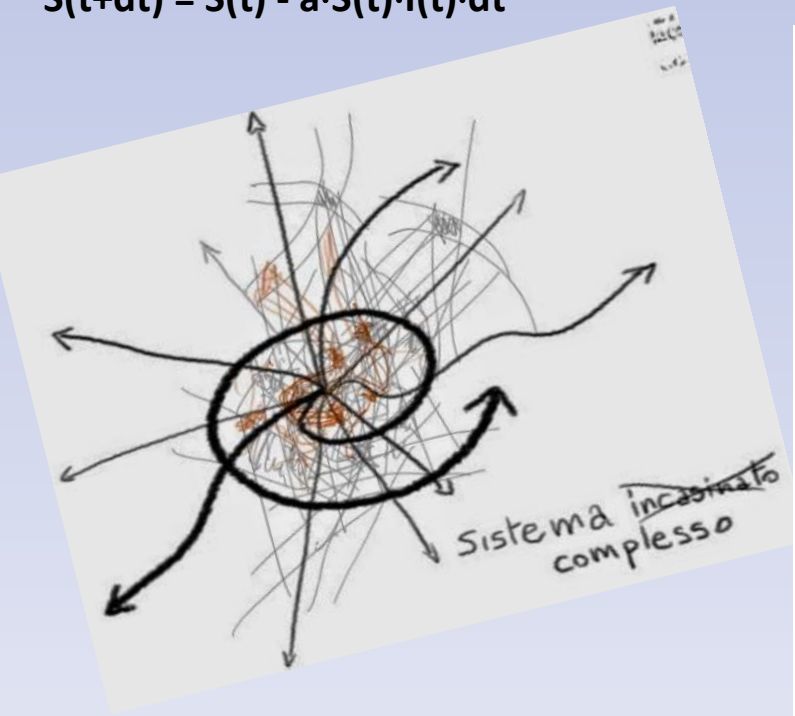


Cosa significa sistema complesso: che il suo comportamento può cambiare drasticamente al variare «sensibilmente» di alcuni parametri

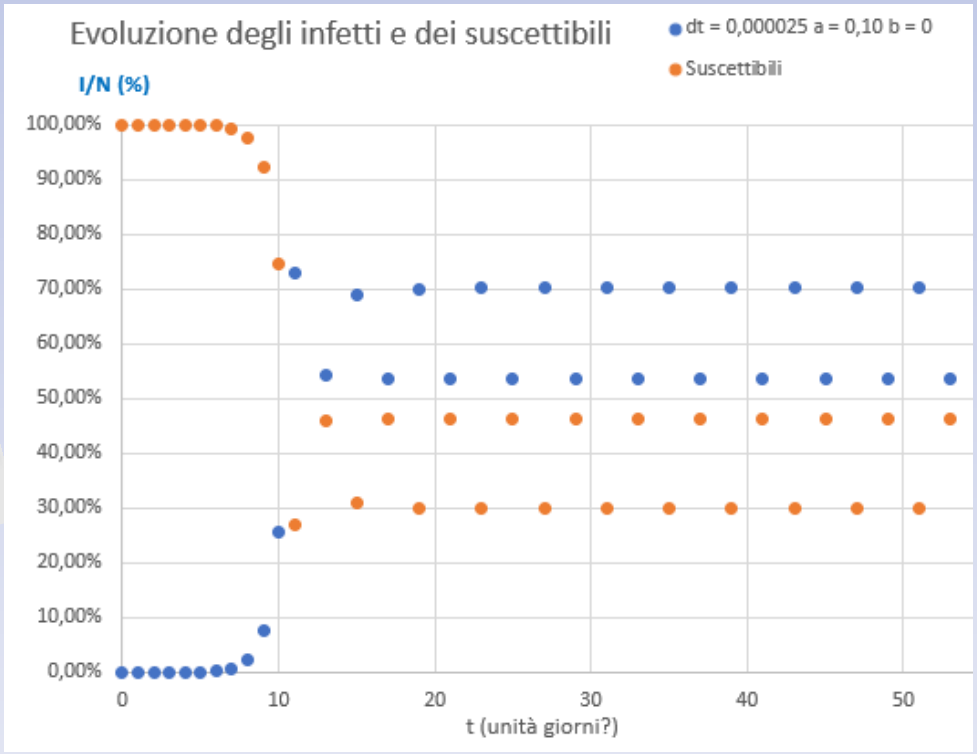
Nell'integrazione numerica delle equazioni, si passa dai valori al tempo **t** di **S** ed **I** ai valori al tempo successivo **t + Δt** , in cui **Δt** deve essere molto piccolo per rendere piccoli gli errori di approssimazione numerica; Si usa quindi il parametro **Δt = dt** :

I(t+dt) = I(t) + a·S(t)·I(t)·dt

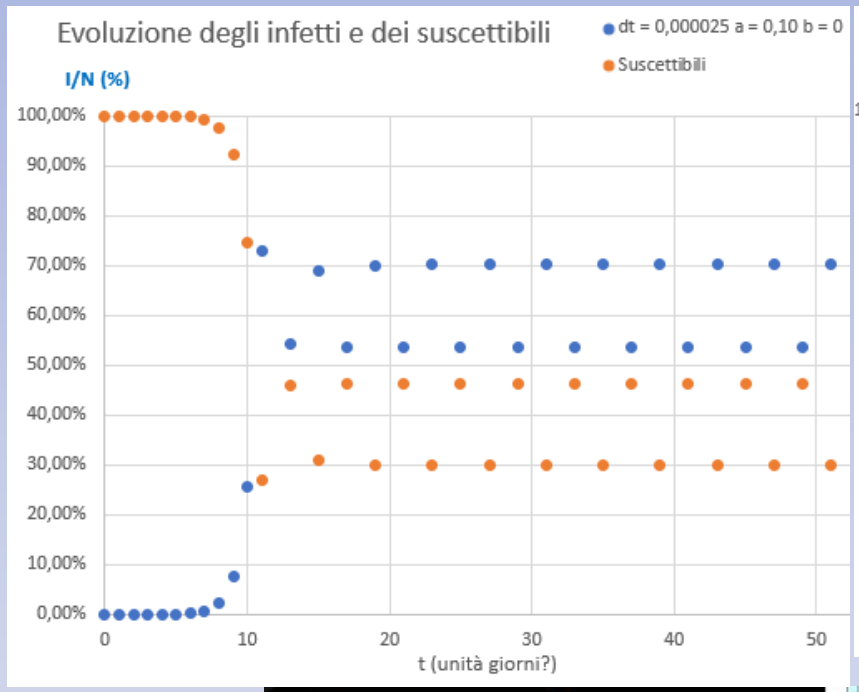
S(t+dt) = S(t) - a·S(t)·I(t)·dt

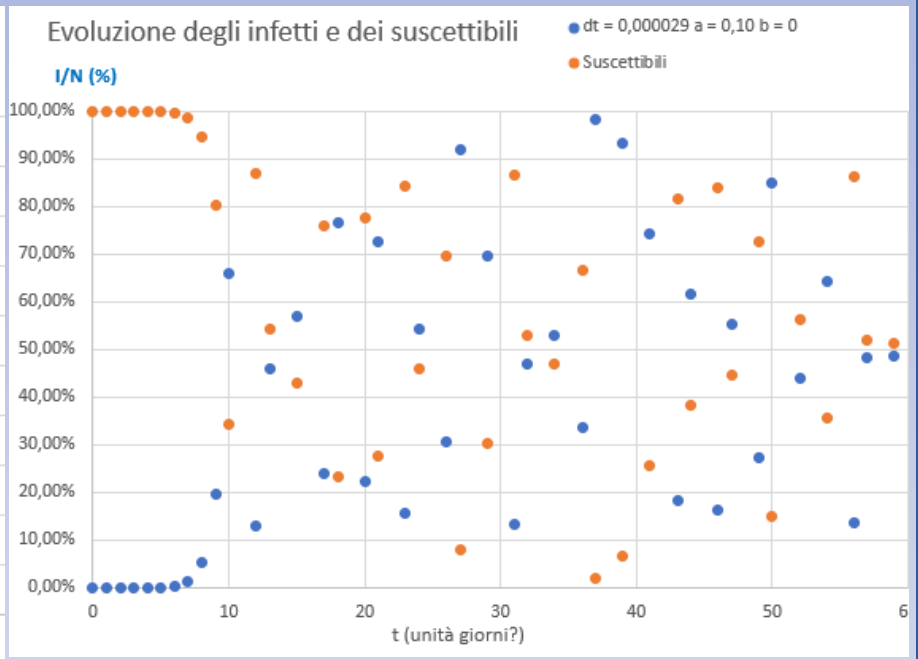


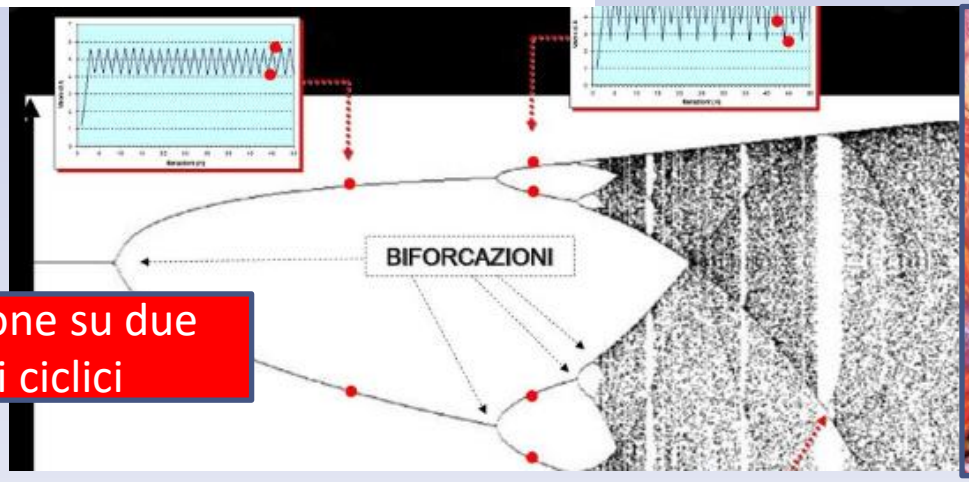
- Nella diapo precedente si è scelto dt = 0,00001 .
- In questa guardate cosa accade per dt = 0,00002



Per dt = 0,000025 e 0,000029 invece …

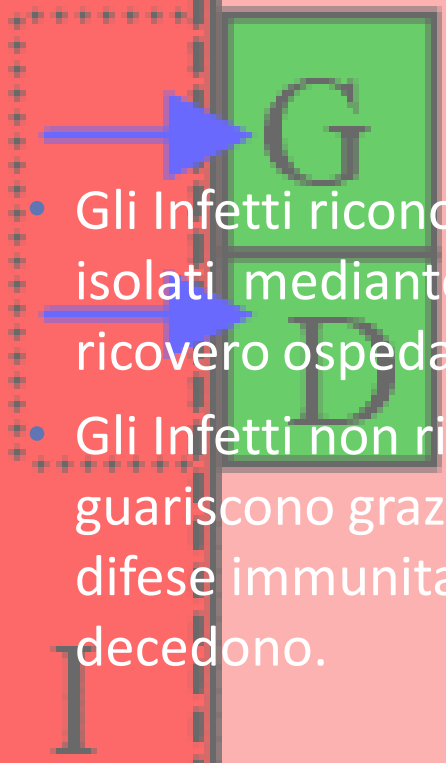






attrazione su due stati ciclici

Gli Infetti però possono essere Rimossi …



- Gli Infetti riconosciuti vengono isolati mediante quarantena e ricovero ospedaliero.
- Gli Infetti non riconosciuti guariscono grazie alle proprie difese immunitarie o decedono.

$$\frac{dI}{dt} = a \cdot S \cdot I - b \cdot I$$

S

La costante di proporzionalità **b** dipende dall'efficienza del Sistema Sanitario nell'individuare gli infetti e nel toglierli dalla circolazione, oltre che dalla letalità del virus e dalle difese immunitarie dei pazienti ammalati.

Nell'equazione $\frac{dI}{dt} = a \cdot S \cdot I$

occorre quindi aggiungere un termine proporzionale al numero di infetti:

Se il virus non fosse contagioso (c = 0) o evitassimo ogni contatto (n = 0)

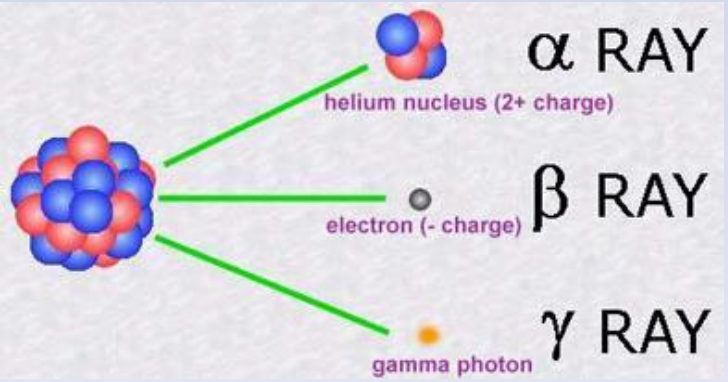
$\Rightarrow$ a = 0

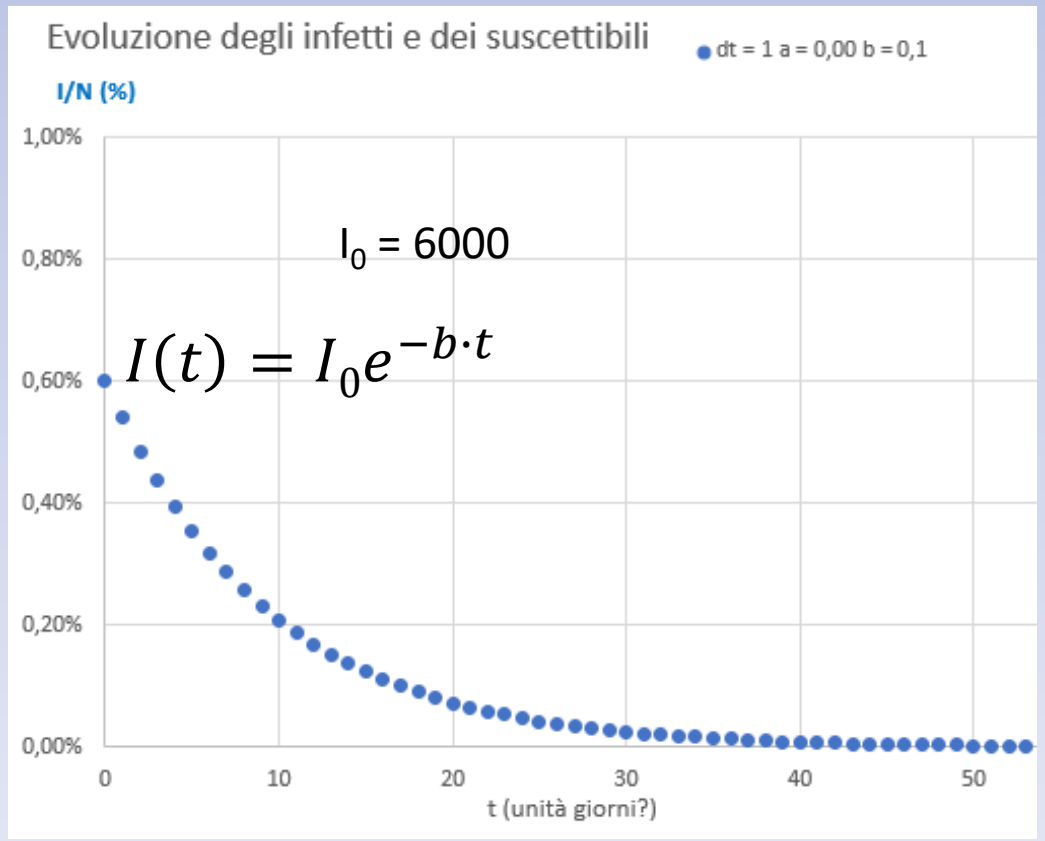
Tenendo conto quindi del solo parametro b, avremmo ancora l'equazione differenziale

$$\frac{dI}{dt} = -b \cdot I$$

che è risolubile esattamente:

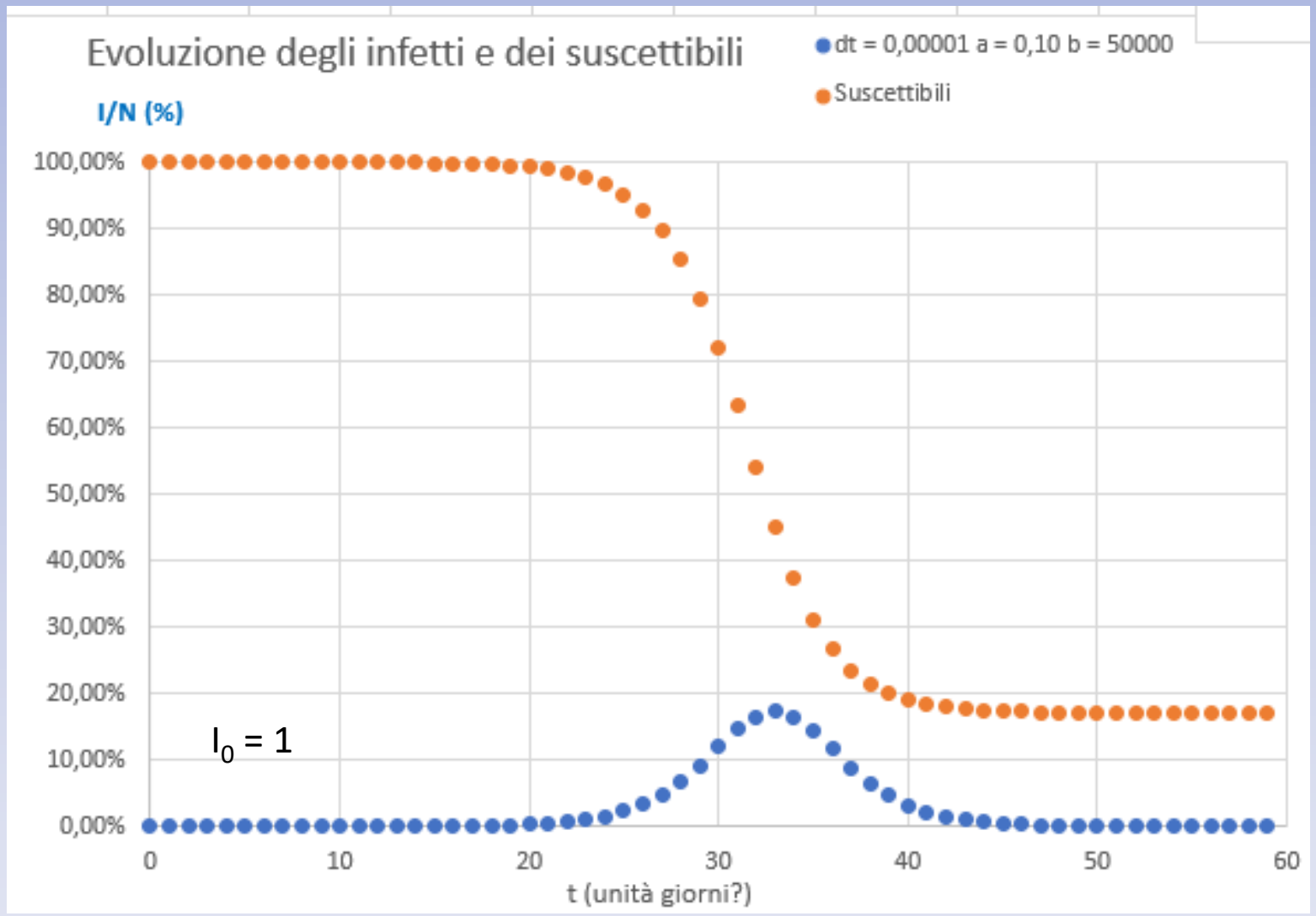
È la stessa legge del decadimento radioattivo!





Considerando sia a > 0 che b > 0

$$R_0 = \frac{a \cdot S_0}{b} = 2$$



Che cosa è $R_0 = a \cdot S/b$

È il parametro che ci informa sull'andamento dell'epidemia.

Se $R_0 < 1$, l'infezione si estingue.
Infatti considerando l'equazione

$$\frac{dI}{dt} = (a \cdot S - b) \cdot I$$

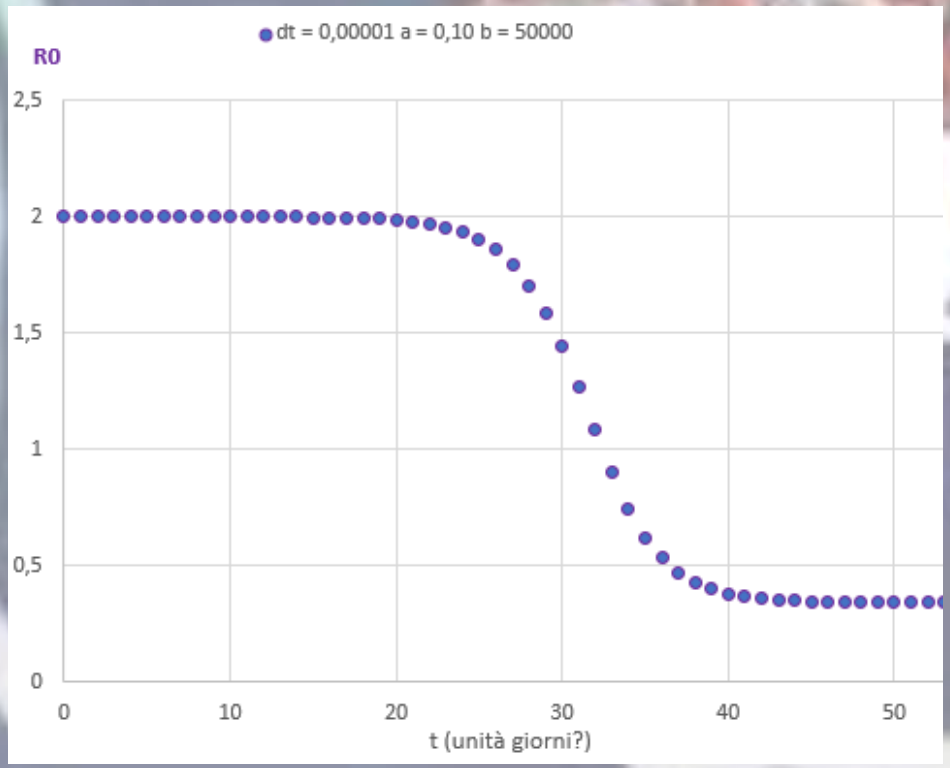
si ha:

$$\frac{dI}{dt} < 0 \iff a \cdot S - b < 0$$

Cioè se e solo se

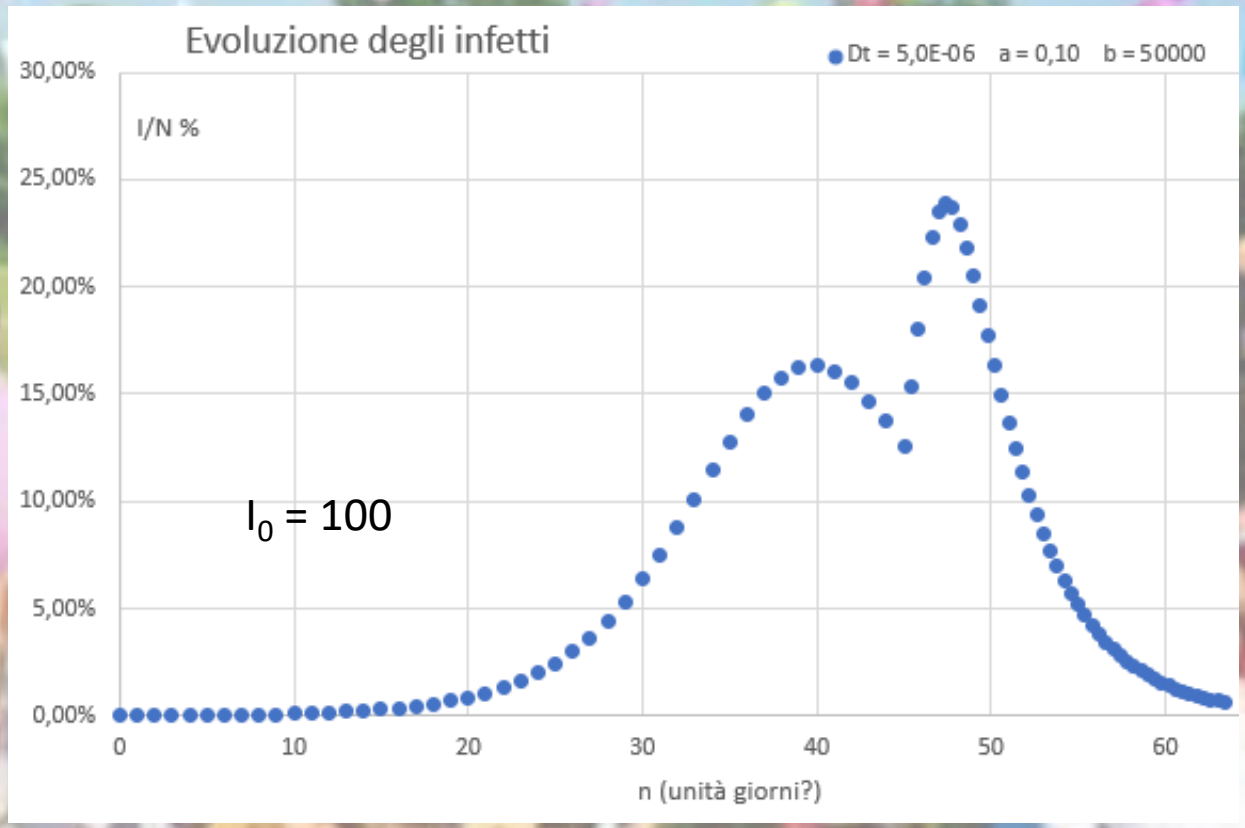
$$R_0 = \frac{a \cdot S}{b} < 1$$

Se non cambiano i parametri a e b, R_0 è proporzionale al numero dei suscettibili.



La pericolosità del «rimbalzo»

Se, presi dall'euforia della discesa della curva degli Infetti, dovessimo allentare le misure di contenimento facendo quindi improvvisamente crescere il parametro a, per esempio se al 45° giorno a diventasse 0,5:

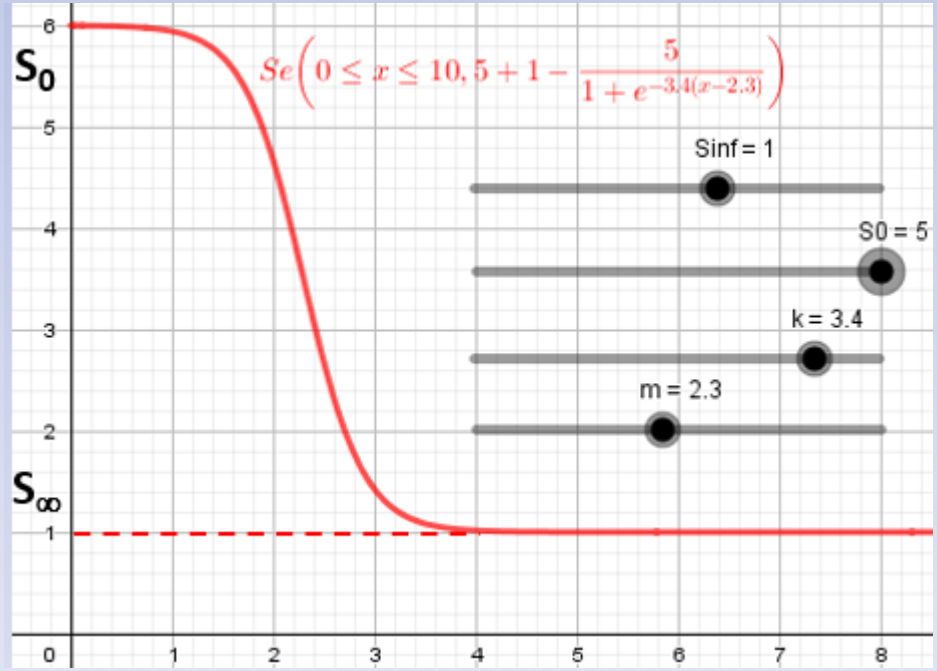


Il problema posto alla fine della presentazione di UniRoma1

Tutti i suscettibili finiranno comunque, prima o poi per ammalarsi o una parte di essi sfuggirà al contagio?

In altri termini:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} 0 \\ S_\infty > 0 \end{cases} ?$$



La curva dei suscettibili assomiglia molto alla curva logistica che è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)$$

Con una simmetria rispetto all'asse delle ascisse, seguita da una opportuna traslazione, la soluzione $N(t) = \frac{N_\infty}{1+qe^{-kt}}$ ove $q = \frac{N_\infty}{N_0} - 1$ viene trasformata in:

$$S(t) = -\frac{(S_0 - S_\infty)(1 + e^{-km})}{1 + e^{-k(t-m)}} + S_0 + (S_0 - S_\infty)e^{-km}$$

L'utilità del modello matematico

Ci aiuta a contenere i danni di un'epidemia!

- Prevedendo S_∞ (possiamo predisporre quindi un numero di posti letto $S_0 - S_\infty$ adeguato)
- Prevedendo i tempi di mantenimento delle restrizioni sociali.

Individua i parametri da regolare per:

- Tenere basso il numero dei suscettibili S_0:
  - **vaccinazioni di massa.**
- Tenere basso il rapporto $\frac{a}{b}$ $\quad \left[R_0 = \frac{a}{b} \cdot S \right]$
  - Tenere basso **a**: **educazione igienico sanitaria**
  - Tenere alto **b**: **miglioramento delle terapie**

Il modello più sofisticato studiato dal Dipartimento di Fisica di Milano

SEIRDC model (Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered-Death-Cumulative*)

Equations of the SEIRDC model

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{r_0}{\tau_I}\frac{I}{N}S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{r_0}{\tau_I}\frac{I}{N}S - \frac{1}{\tau_E}E$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau_E}E - \frac{1}{\tau_I}I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

$$\frac{dD}{dt} = \delta I$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{\tau_E}E$$

$$N = S + E + I + R$$

S : n. of individuals in the susceptible state
E : n. of individuals in the exposed state (infected but without infectiousness)
I : n. of individuals in the infected state (i.e. with infectiousness)
R : n. of individuals in the recovered state
D : n. of deaths
C : total n.of individuals who have contracted the infection, C=I+R+D

r_0 is the reproduction number: $r_0=\beta\tau_I$ where β is the average number of effective contacts with an infected people per unit time.

Hence r_0 is the average number of infected people generated by each infected person during the desease.

N=total population, I/N probability to meet an infected people

τ_E average time in the exposed state E
τ_I average time in the infected state I

$$\gamma = \frac{1}{\tau_I}(1-p)$$

$$\delta = \frac{1}{\tau_I}p$$

where p is the mean case fatality proportion

*some references: [1] J. of the Royal Soc. Interface (2007) 4, 155–166 -- Effective reproduction number of 2019-nCoV, https://doi.org/10.1101/2020.01.27.20018952 – [2] Clinical Characteristics of Coronavirus Disease 2019 in China, **DOI: 10.1056/NEJMoa2002032** – [3] Early Transmission Dynamics in Wuhan, **DOI: 10.1056/NEJMoa2001316** – [4] The Incubation Period of Coronavirus Disease 2019, **Doi:10.7326/M20-0504**

Prof. Alberto F. Colombo 5/17/2020